

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

«Производство и детектирование
аксионоподобных частиц в
сверхпроводящих резонаторах»

Выполнил
студент 4 курса 443 группы
Сальников Дмитрий Владимирович

(подпись студента)

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Белокуров Владимир Викторович

(подпись научного руководителя)

Научный консультант:
кандидат физ.-мат. наук, н.с. ОТФ ИЯИ РАН
Сатунин Пётр Сергеевич

(подпись научного консультанта)

Допущен к защите 31.05.2021
(дата)

Зав. кафедрой _____
(подпись зав. кафедрой)

Москва, 2021 г.

Содержание

1	Введение	3
2	Цели работы	3
3	Схема эксперимента	4
4	Теоретическая модель	5
5	Производство аксионоподобных частиц	6
5.1	Инвариант электромагнитного поля	6
5.2	Решение уравнения Клейна-Гордона	7
5.3	Средняя по времени плотность энергии	7
5.4	Диаграмма направленности	12
6	Детектирование аксионоподобных частиц	13
6.1	Уравнения Максвелла с источником	13
6.2	Генерация сигнального электромагнитного поля	13
6.3	Чувствительность установки	17
7	Заключение	20
8	Дальнейшие исследования	21
A	Явные выражения для TM_{npq} и TE_{npq} - мод цилиндрического резонатора	22
	Список литературы	23

1 Введение

Аксионы и *аксионоподобные частицы* - это гипотетические псевдоскалярные массивные частицы, которые появляются в некоторых расширениях Стандартной модели. Изначально их ввели для решения сильной CP - проблемы в квантовой хромодинамике [1, 2]. Позже было показано, что аксионоподобные частицы могут появляться в низкоэнергетическом феноменологическом описании теории струн [3, 4].

Астрофизические и космологические наблюдения позволяют предполагать, что аксионоподобные частицы являются хорошими кандидатами на роль частиц *темной материи* [5, 6, 7].

Свойства аксионной темной материи чувствительны к параметрам взаимодействия. В частности, соответствующая тёмная материя может быть сгруппирована в миникластеры [8] или образовывать другие неоднородные структуры [9]. Аксионное поле также может составлять экзотические компактные объекты (бозе-звёзды [10, 11]), обеспечивающие возможное объяснение быстрых радиовсплесков [12, 13].

На данный момент существует множество типов *экспериментов*, направленных на поиски аксионоподобных частиц: галоскопы, которые предназначены для детектирования аксионоподобных частиц тёмной материи в гало нашей галактики [14, 15, 16], гелиоскопы, специализирующиеся на аксионоподобных частицах от Солнца [17], эксперименты на ускорителях [18, 19, 20, 21], космические гамма-телескопы [22] и другие.

В данной работе рассматривается теоретическая модель эксперимента, который бы позволил обнаружить аксионоподобные частицы в *лабораторных условиях* [23, 24, 25, 26].

Наиболее полный обзор экспериментов, связанных с аксионоподобными частицами, представлен здесь [27].

2 Цели работы

Были поставлены следующие цели:

1. Смоделировать производство аксионоподобных частиц в сильных электромагнитных полях сверхпроводящего цилиндрического резонатора;
2. Исследовать свойства рождённых частиц: пространственное распределение их средней по времени плотности энергии и направление их распространения в зависимости от геометрии цилиндрического резонатора и возбуждаемых мод накачки;
3. Исследовать возможность регистрации рождённых аксионоподобных частиц в детектирующем резонаторе;
4. Оптимизировать параметры эксперимента.

Актуальность данного исследования состоит в том, что на данный момент Стандартная модель элементарных частиц не способна объяснить астрофизические наблюдения, связанные с тёмной материей, средняя плотность энергии которой во Вселенной в пять раз превышает плотность энергии «обычного» вещества. Существующие эксперименты пока не дают результатов по поиску частиц за пределами Стандартной модели. Данная работа направлена на теоретическое описание эксперимента, способного сделать прорывное открытие в области физики высоких энергий.

3 Схема эксперимента

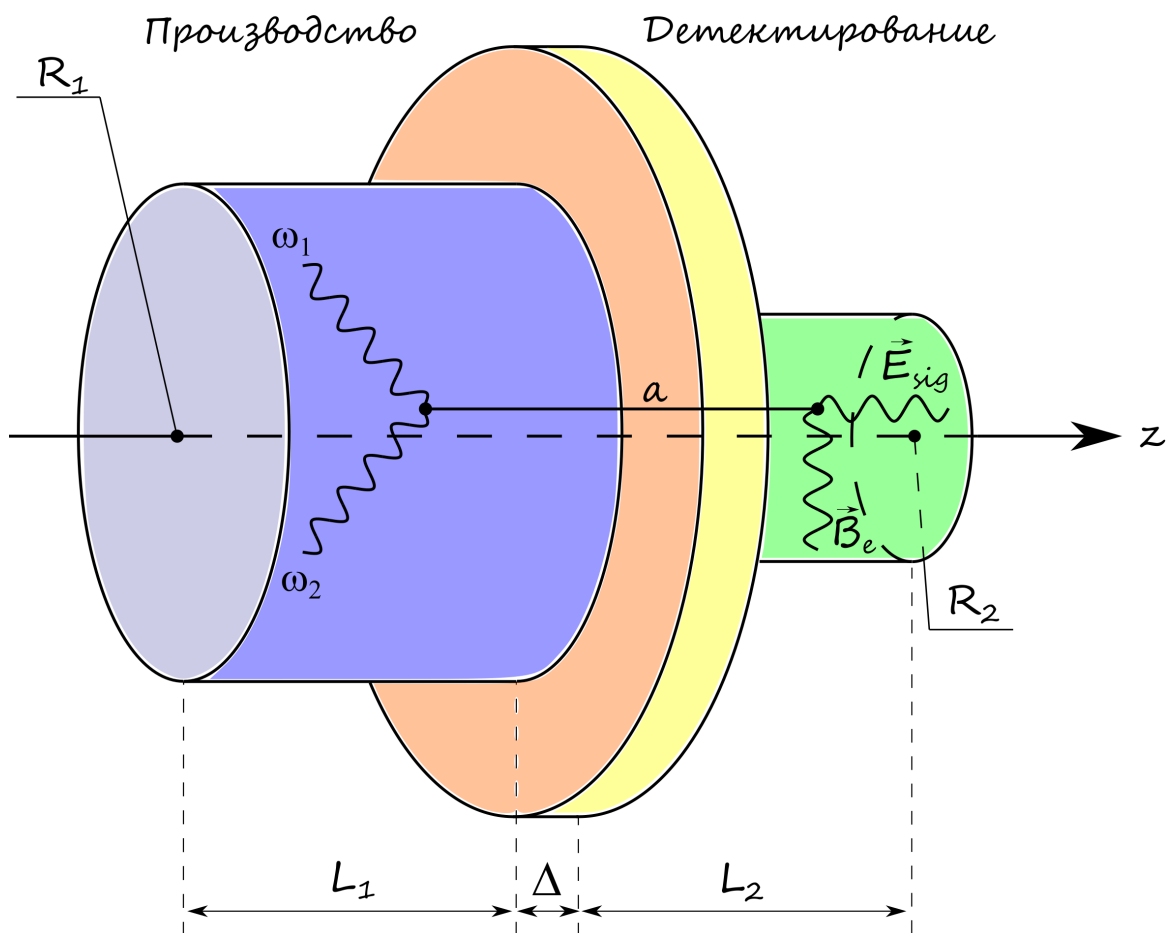


Рисунок 1 - Схема эксперимента

Модель рассматриваемой установки представляет собой два коаксиальных цилиндрических сверхпроводящих резонатора, разделённых сверхпроводящей экранящей пластиной (Рисунок 1). В резонаторе, который на схеме расположен слева, возбуждаются две стоячие электромагнитные моды с большими амплитудами полей. В этих полях рождаются аксионоподобные частицы, которые могут беспрепятственно проникать сквозь пластину во второй резонатор, где создаётся сильное постоянное однородное магнитное поле

$\vec{B}_e$, направленное вдоль оси z . Взаимодействуя с этим магнитным полем, аксионоподобные частицы рожают сигнальную электромагнитную моду, электрическое поле которое можно зарегистрировать.

Эта установка была предложена и реализована как для оптического [28], так и для радиочастотного диапазонов [23]. Как оптический эксперимент LSW ALPS [29], так и радиочастотный эксперимент CROWS [30] дают одинаковые ограничения по порядку величины¹ для зависимости чувствительности $g_{a\gamma\gamma}$ от массы аксионоподобных частиц m_a (подробнее см. [27]). В частности, для малых масс аксионоподобных частиц $g_{a\gamma\gamma} \lesssim 10^{-7} \text{ GeV}^{-1}$, что по-прежнему является лучшим чисто лабораторным ограничением. Значительно лучшие ограничения (до $g_{a\gamma\gamma} \lesssim 10^{-10} \text{ GeV}^{-1}$) следуют из ненаблюдения аксионоподобных частиц темной материи от Солнца (например, [17]). Таким образом, космические и лабораторные методы поиска аксионоподобных частиц дополняют друг друга.

Классическая установка такого рода экспериментов требует внешнего магнитного поля как в производящем, так и в детектирующем резонаторах. Однако добротность резонаторов ограничена на уровне $Q \lesssim 10^5$, что подразумевает ограничение амплитуды мод накачки. Поэтому чувствительность установки снижается. Гораздо большая добротность $Q \sim 10^{12}$ может быть достигнута с помощью сверхпроводящих радиочастотных резонаторов, но при этом возникает ограничение: максимальные амплитуды для мод резонатора ограничены магнитным полем вблизи стенок резонатора. В частности, для сверхпроводящего ниобия [32] критическое магнитное поле составляет ~ 0.2 Тл. Учитывая это ограничение на магнитное поле, авторы [25] предложили установку, включающую в себя цилиндрический производящий резонатор и тороидальный детектор. Кроме того, было отмечено, что чувствительность существенно зависит от геометрического форм-фактора.

4 Теоретическая модель

Аксионоподобные частицы описываются вещественным массивным псевдоскалярным полем $a(\vec{x}, t)$ с массой m_a .

Лагранжиан взаимодействия аксионоподобных частиц с электромагнитным полем имеет вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu a \partial^\mu a - \frac{1}{2}m_a^2 a^2 + \frac{g_{a\gamma\gamma}}{4} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (1)$$

где $g_{a\gamma\gamma}$ - константа взаимодействия, $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ - дуальный тензор поля.

¹Такое же ограничение по порядку величины было получено в эксперименте с оптической поляризацией PVLAS [31].

Из лагранжиана (1) получаем уравнения движения:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_a^2) a = \frac{g_{a\gamma\gamma}}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (2)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = g_{a\gamma\gamma} \tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\mu a. \quad (3)$$

Уравнение Клейна - Гордона (2) описывает рождение аксионоподобных частиц в производящем резонаторе в случае, когда инвариант электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -4(\vec{E} \cdot \vec{B}) \quad (4)$$

отличен от нуля.

Уравнения Максвелла (3) описывает генерацию сигнального электромагнитного поля при взаимодействии аксионоподобных частиц с магнитным полем $\vec{B}_e$ в детектирующем резонаторе.

5 Производство аксионоподобных частиц

Детально рассмотрим производство аксионоподобных частиц в производящем резонаторе.

5.1 Инвариант электромагнитного поля

Для каждой отдельной моды инвариант (4) в точности равен нулю. Это означает, что аксионоподобные частицы в данном случае не могут быть произведены. Поэтому необходимо рассмотреть как минимум две моды, для которых инвариант (4) отличен от нуля.

Запишем выражения для электромагнитного поля мод накачки в виде:

$$\vec{E}_i(\vec{x}, t) = \sqrt{2} \Re \left[\vec{\mathcal{E}}_i(\vec{x}, \omega_i) e^{-i\omega_i t} \right], \quad \vec{B}_i(\vec{x}, t) = \sqrt{2} \Re \left[\vec{\mathcal{B}}_i(\vec{x}, \omega_i) e^{-i\omega_i t} \right], \quad (5)$$

где $\vec{\mathcal{E}}_i(\vec{x}, \omega_i)$ и $\vec{\mathcal{B}}_i(\vec{x}, \omega_i)$ - комплексные амплитуды ТМ_{npq} и ТЕ_{npq} мод производящего резонатора (Приложение А).

Тогда инвариант электромагнитного поля (4) будет равен:

$$\left(\vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) \right) = \Re \left[F_+(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega_+ t} + F_-(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega_- t} \right], \quad (6)$$

где $F_\pm$ - это функции комплексных амплитуд мод накачки:

$$F_+(\vec{x}) \equiv \vec{\mathcal{E}}_1(\vec{x}) \cdot \vec{\mathcal{B}}_2(\vec{x}) + \vec{\mathcal{E}}_2(\vec{x}) \cdot \vec{\mathcal{B}}_1(\vec{x}), \quad (7)$$

$$F_-(\vec{x}) \equiv \vec{\mathcal{E}}_1^*(\vec{x}) \cdot \vec{\mathcal{B}}_2(\vec{x}) + \vec{\mathcal{E}}_2(\vec{x}) \cdot \vec{\mathcal{B}}_1^*(\vec{x}), \quad (8)$$

а частоты $\omega_\pm$ - модуль суммы и разности их частот:

$$\omega_\pm = |\omega_1 \pm \omega_2|. \quad (9)$$

5.2 Решение уравнения Клейна-Гордона

Будем решать уравнение (2) в установившемся режиме, тогда можем представить аксионное поле в виде:

$$a(\vec{x}, t) = \Re [a_+(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega_+ t} + a_-(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega_- t}] . \quad (10)$$

В силу линейности уравнения (2) справедлив принцип суперпозиции, тогда исходное уравнение разобьётся на два уравнения на комплексные амплитуды $a_{\pm}(\vec{x})$:

$$[\Delta + k_{\pm}^2] a_{\pm}(\vec{x}) = g_{a\gamma\gamma} F_{\pm}(\vec{x}), \quad (11)$$

где $k_{\pm}$ - волновое число:

$$k_{\pm} = \sqrt{\omega_{\pm}^2 - m^2}. \quad (12)$$

Уравнение (11) представляет собой уравнение Гельмгольца. Его фундаментальное решение:

$$a_{\pm}^0(\vec{x}) = -\frac{e^{\pm ik_{\pm}|\vec{x}|}}{4\pi|\vec{x}|}. \quad (13)$$

Для выделения единственного решения, представляющего собой волну, убегающую на бесконечность, необходимо наложить условия излучения Зоммерфельда:

$$a_{\pm}(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right), \quad \frac{\partial a_{\pm}}{\partial |\vec{x}|} - ik_{\pm} a_{\pm} = o\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right). \quad (14)$$

Тогда из решений уравнений (11) с условиями (14) получаем две аксионные сферические волны:

$$a_{\pm}(\vec{x}, t) = -\frac{g_{a\gamma\gamma}}{4\pi} \Re \int_{V_{cav}} d^3x' \frac{F_{\pm}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot e^{ik_{\pm}|\vec{x} - \vec{x}'| - i\omega_{\pm} t}. \quad (15)$$

Таким образом, при использовании двух мод накачки, будут рождаться аксионы с двумя энергиями: ω_+ и ω_- . Легко показать, что в случае использования большего числа мод накачки, необходимо рассмотреть всевозможные их пары, каждая из которых будет производить две соответствующие аксионные волны независимо от других.

Интеграл в формуле (15) не поддаётся аналитическому исследованию вблизи резонатора, поэтому для его анализа были применены численные методы.

5.3 Средняя по времени плотность энергии

Для описания интенсивности рождения аксионоподобных частиц была вычислена их средняя по времени плотность энергии:

$$\langle \rho_{\pm}^E \rangle_T = \frac{1}{2} \langle \dot{a}_{\pm}^2 \rangle_T + \frac{1}{2} \langle \partial_i a_{\pm} \partial^i a_{\pm} \rangle_T + \frac{1}{2} m_a^2 \langle a_{\pm}^2 \rangle_T . \quad (16)$$

Её пространственное распределение зависит от:

1. Массы аксионоподобных частиц;
2. Геометрии цилиндрического резонатора;
3. Мод накачки.

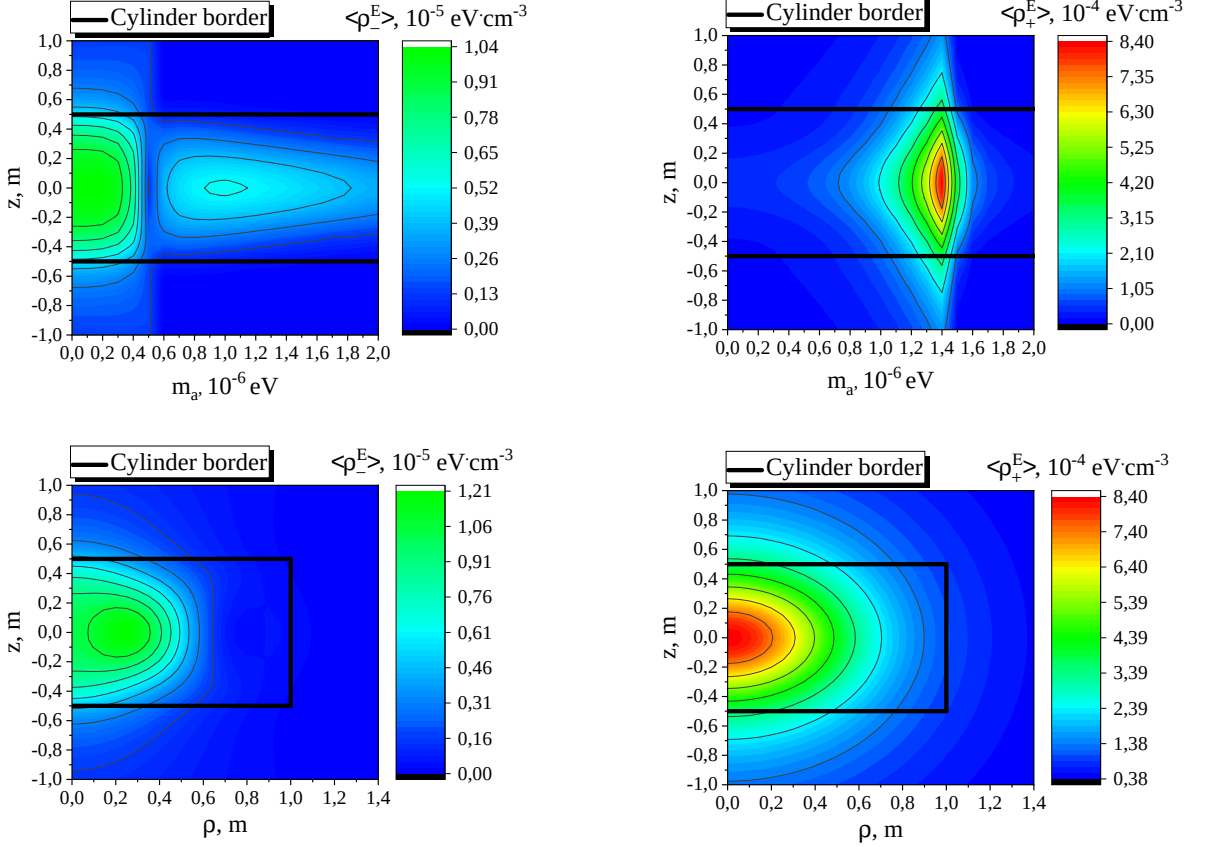


Рисунок 2 - Средняя плотность энергии для $TM_{010} + TE_{011}$ - мод производящего резонатора

На рисунке 2 представлены зависимости средней плотности энергии на оси цилиндра от массы аксионоподобных частиц и координаты z (два верхних графика) и её пространственное распределение (два нижних графика, зависимости от угла φ в данном случае нет, так как $n_1 = n_2 = 0$) для волны с индексом «-» (два левых графика) и волны с индексом «+» (два правых графика) в случае комбинации мод накачки $TM_{010} + TE_{011}$.

Можно сделать два важных вывода. Во-первых, плотность энергии с индексом «-» подавлена по сравнению с плотностью энергии с индексом «+» практически в 100 раз. Это выполняется и для других мод. Это означает, что выгоднее регистрировать аксионоподобные частицы с частотой ω_+ . Во-вторых, заметим, что зависимость плотности энергии с индексом «+» от массы имеет «резонансный» характер: пик приходится на массу немного меньшую частоты ω_+ . Для плотности энергии с индексом «-» такого эффекта не

наблюдается. Пространственное распределение в данном случае таково, что максимум приходится на область внутри резонатора, а в области, где можно расположить детектирующий резонатор плотность энергии в 4 - 5 раз меньше максимальной.

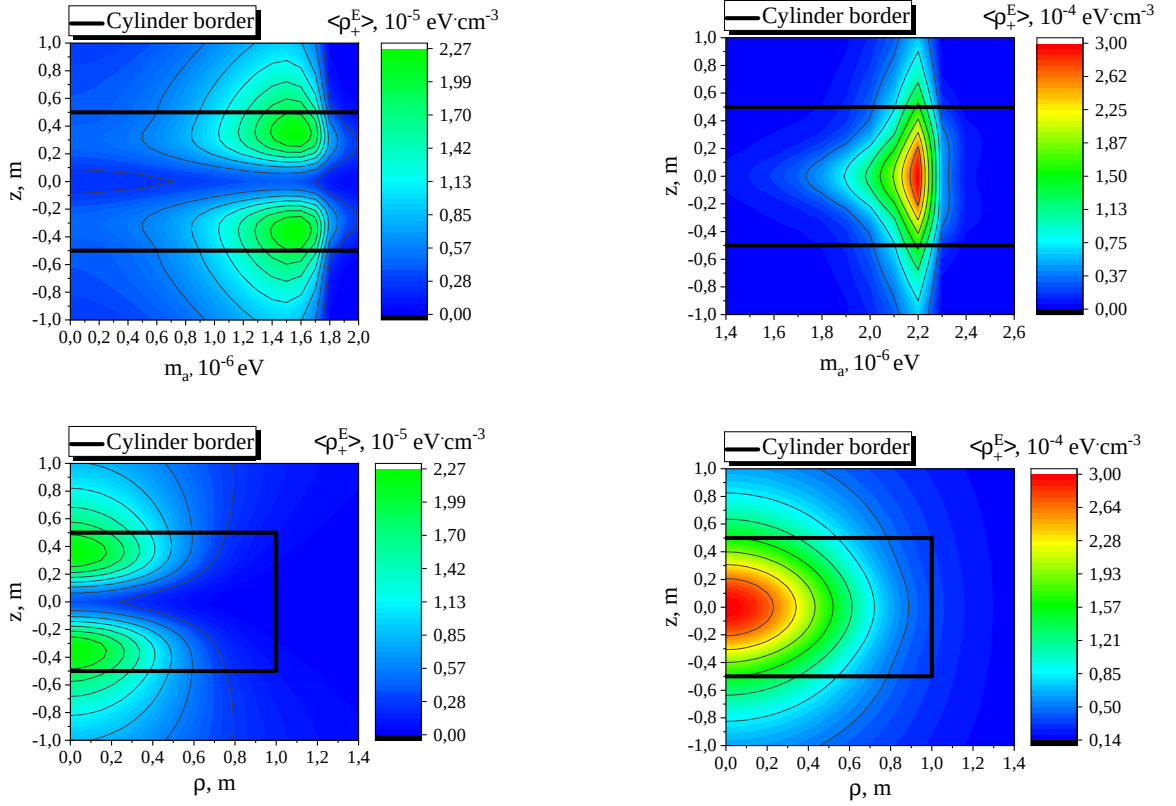


Рисунок 3 - Средняя плотность энергии для $\text{TM}_{011} + \text{TE}_{011}$ и $\text{TM}_{011} + \text{TE}_{012}$

На рисунке 3 представлены аналогичные графики для плотности энергии с индексом «+», но для других комбинаций мод: $\text{TM}_{011} + \text{TE}_{011}$ (два графика слева) и $\text{TM}_{011} + \text{TE}_{012}$ (два графика справа). Можно сделать два важных замечания. Слева мы видим другой тип распределения плотности энергии: максимумы приходятся на границы цилиндра, но плотность энергии подавлена на порядок по сравнению с правыми графиками. Более подробный анализ показывает, что наиболее эффективным является комбинация мод, для которых первые индексы совпадают, а сумма последних нечётна (как для комбинации мод справа). Это связано с тем, что при других комбинациях индексов справедливо:

$$\int_{V_{cav}} d^3x' F_{\pm}(\vec{x}') \equiv 0. \quad (17)$$

Более детальное обоснование того, что при условии (17) мы получим подавление средней плотности энергии, будет приведено в разделе 5.4.

На рисунке 4 представлены аналогичные графики для разных геометрий цилиндра: в форме «блина» (два графика слева) и в форме «трубы» (два графика справа). Можно также сделать два важных заключения. Во-первых,

для геометрии в форме «блина» мы видим подавление на порядок по сравнению с геометрией в виде «трубы». Во-вторых, в случае геометрии «блина» в основном частицы рождаются на оси цилиндра, в то время как в случае геометрии «трубы» это происходит в радиальном направлении.

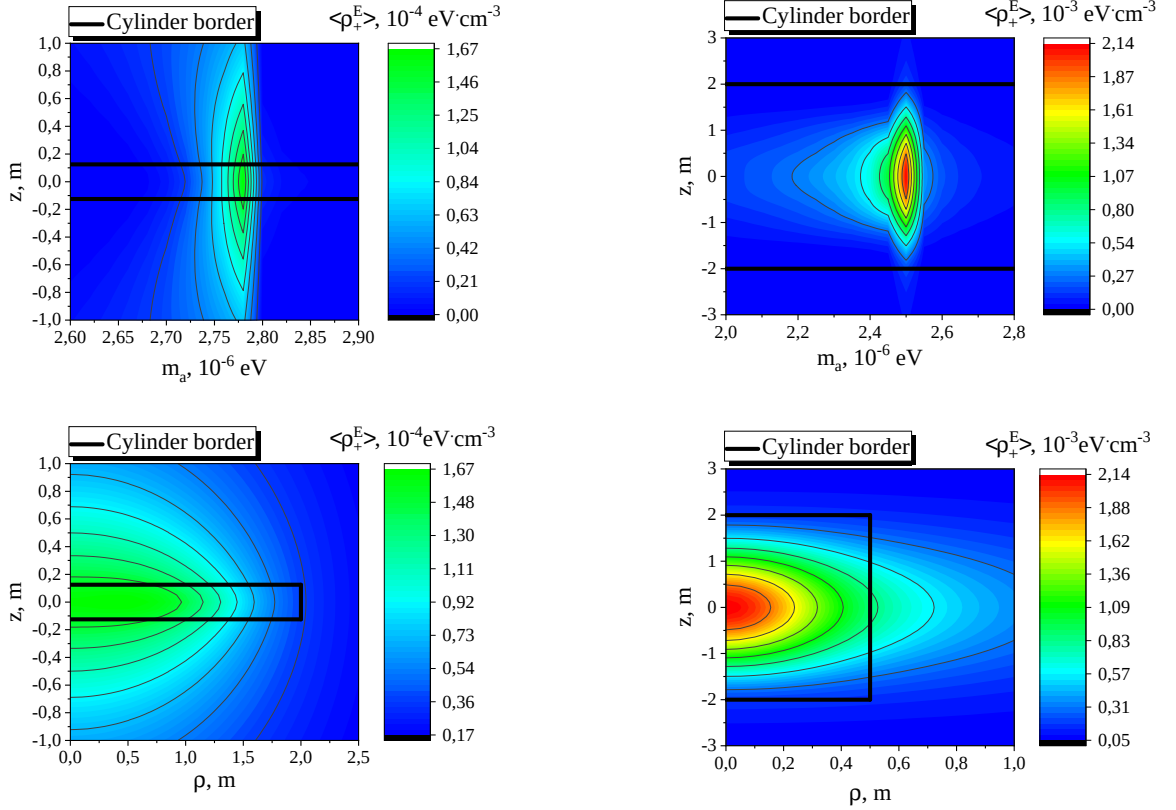


Рисунок 4 - Средняя плотность энергии для $\text{TM}_{010} + \text{TE}_{011}$ для разных геометрий цилиндрического резонатора

На рисунке 5 представлены графики для более высоких мод ($\text{TM}_{013} + \text{TE}_{114}$ и $\text{TM}_{013} + \text{TE}_{014}$). Заметим, что выполняется правило, указанное ранее: при $n_1 \neq n_2$ получаем существенное подавление по сравнению со случаем $n_1 = n_2$. Так же отметим, что реализуется ещё один тип пространственного распределения плотности энергии: максимум приходится на область внутри резонатора на некотором расстоянии от оси.

На рисунке 6 дополнительно представлена зависимость средней плотности энергии от угла и расстояния до оси в плоскости, разделяющую цилиндр на две равные части.

Отметим, что из полученных зависимостей легко получить концентрацию рождённых аксионоподобных частиц:

$$\langle n_{\pm}(\vec{x}) \rangle_T = \frac{\langle \rho_{\pm}^E(\vec{x}) \rangle_T}{\omega_{\pm}}. \quad (18)$$

Для пиковых значений на рисунке 2 для волны с индексом «+» получим

$$\langle n_{+} \rangle_T^{\max} \sim \frac{10^{-4} \text{ эВ} \cdot \text{см}^{-3}}{10^{-6} \text{ эВ}} \sim 100 \frac{1}{\text{см}^3}. \quad (19)$$

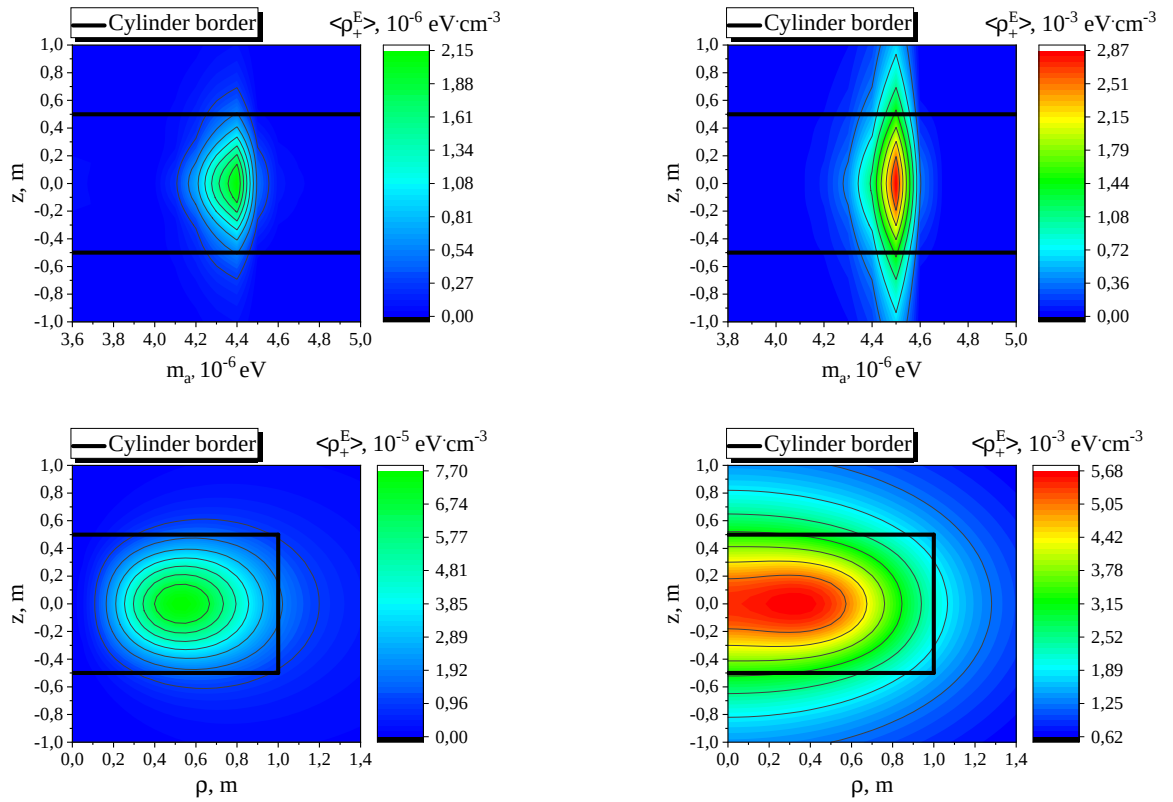


Рисунок 5 - Средняя плотность энергии для ТМ₀₁₃ + ТЕ₁₁₄ (два графика слева) и ТМ₀₁₃ + ТЕ₀₁₄ (два графика справа) - мод производящего резонатора

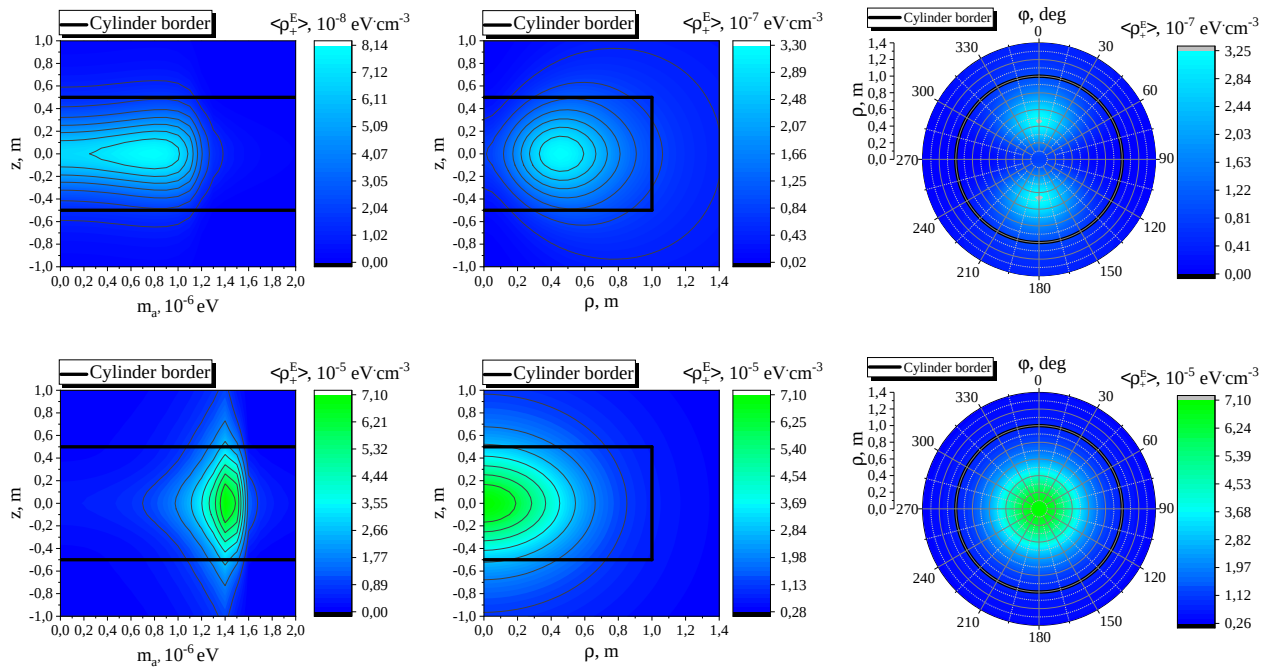


Рисунок 6 - Средняя плотность энергии для ТМ₀₁₀ + ТЕ₁₁₁ - мод (три верхних графика), и для ТМ₁₁₀ + ТЕ₁₁₁ - мод (три нижних графика) производящего резонатора

5.4 Диаграмма направленности

В дальней зоне $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ можем разложить подынтегральную функцию в (15) по малому параметру $\vec{x}'$:

$$a(\vec{x}, t) = -\frac{g_{a\gamma\gamma}}{4\pi} \Re e^{-i\omega_{\pm}t} \int_{V_{cav}} d^3x' F_{\pm}(\vec{x}') \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\vec{x}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}})^n \frac{e^{ik_{\pm}|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}. \quad (20)$$

Можно показать, что

$$(\vec{x}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}})^n \frac{e^{ik_{\pm}|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} = (ik_{\pm})^n \left(\vec{x}' \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \right)^n \frac{e^{ik_{\pm}|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} + o\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right). \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20), получаем асимптотическую формулу:

$$a_{\pm}(\vec{x}, t) = -\frac{g_{a\gamma\gamma}}{4\pi|\vec{x}|} \Re e^{ik_{\pm}|\vec{x}| - i\omega_{\pm}t} \int_{V_{cav}} d^3\vec{x}' F_{\pm}(\vec{x}') \cdot \exp \left[-ik_{\pm} \left(\vec{x}' \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \right) \right] + o\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right). \quad (22)$$

Отметим, что интеграл в формуле (22) зависит лишь от направления $\vec{x}/|\vec{x}|$. Таким образом, в дальней зоне мы получаем сферическую волну с нетривиальной диаграммой направленности. Введём функцию, характеризующую её:

$$f_{\pm}(\varphi, \theta) = \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \frac{\langle a_{\pm}^2 \rangle_T}{\max_{\varphi, \theta} \langle a_{\pm}^2 \rangle_T}. \quad (23)$$

Отметим, что при $k_{\pm} = 0$ мы получаем тривиальную диаграмму: интеграл в формуле (22) не зависит от направления.

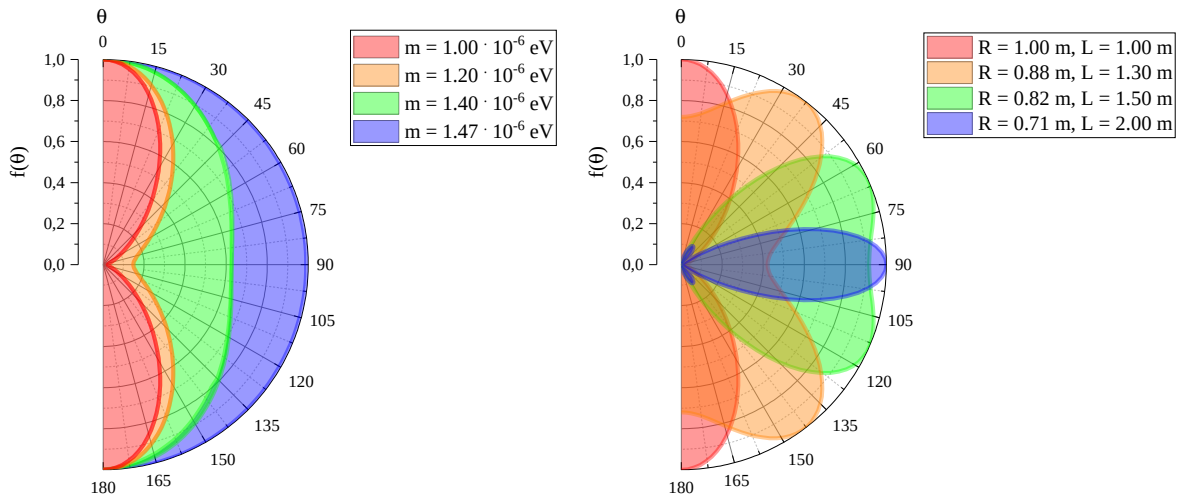


Рисунок 7 - Диаграмма направленности для $TM_{010} + TE_{011}$ - мод для разных масс аксионоподобных частиц и геометрий цилиндрического резонатора.

На рисунке 7 представлены зависимости диаграммы направленности от массы аксионоподобных частиц для волны с индексом «+» при $R_1 = L_1 = 1$ м (график слева) и от геометрии цилиндрического резонатора для массы аксионоподобных частиц $m_a = 1 \cdot 10^{-6}$ эВ (график справа) для комбинации $\text{TM}_{010} + \text{TE}_{011}$ мод накачки. Как и следовало ожидать, при массе близкой к ω_+ (в этом случае $k \simeq 0$) диаграмма тривиальная. При уменьшении массы (то есть при увеличении k) при данной геометрии цилиндрического резонатора частицы рождаются в основном в направлении оси резонатора. На правом же графике хорошо виден переход от режима генерации вдоль оси резонатора к режиму генерации вдоль радиального направления и промежуточные режимы под углом к оси. Первый режим соответствует отношению $R/L \gtrsim 1$, второй - $R/L \lesssim 0.35$.

Отметим, что из формулы (22) можно получить условие на оптимальные моды, которое обсуждалось в разделе 5.3 ($n_1 = n_2$, нечётное $q_1 + q_2$). В случае, когда выполняется

$$\int_{V_{cav}} d^3x' F_{\pm}(\vec{x}') \equiv 0 \quad (24)$$

первый член в асимптотике (22) в резонансном случае ($\omega_{\pm} = m_a$) зануляется и мы получаем сферическую волну, убывающую как $|\vec{x}|^{-2}$. Это объясняет подавление средней плотности энергии для таких мод вне резонатора.

6 Детектирование аксионоподобных частиц

Детально рассмотрим детектирование рождённых аксионоподобных частиц во втором резонаторе.

6.1 Уравнения Максвелла с источником

Уравнения Максвелла с источником (3) описывают генерацию сигнального электромагнитного поля при взаимодействии аксионоподобных частиц с полем $\vec{B}_e$. Запишем их в виде двух уравнений на напряжённость электрического и магнитного поля:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -g_{a\gamma\gamma} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla} a), \quad (25)$$

$$[\vec{\nabla} \times \vec{B}] = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + g_{a\gamma\gamma} \left(\vec{B} \frac{\partial a}{\partial t} - [\vec{E} \times \vec{\nabla} a] \right). \quad (26)$$

6.2 Генерация сигнального электромагнитного поля

Из уравнений (25 - 26) с учётом диссипаций получим уравнение на $\vec{E}^{\text{sig}}$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Gamma \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right] \vec{E}^{\text{sig}} = g_{a\gamma\gamma} \left[\vec{\nabla} (\vec{B}_e \cdot \vec{\nabla} a) - \vec{B}_e \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \right]. \quad (27)$$

Для описания сигнального электромагнитного поля разложим его по собственным модам *детектирующего* резонатора:

$$\vec{E}^{\text{sig}}(\vec{x}, t) = \sum_m \vec{\mathcal{E}}_m(\vec{x}) E_m^{\text{sig}}(t). \quad (28)$$

Собственные моды $\vec{\mathcal{E}}_m(\vec{x})$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца в цилиндрической области:

$$\Delta \vec{\mathcal{E}}_m(\vec{x}) + \omega_m^2 \vec{\mathcal{E}}_m(\vec{x}) = 0 \quad (29)$$

и условию ортогональности:

$$\int_{2\text{cav}} d^3x (\vec{\mathcal{E}}_m(\vec{x}) \cdot \vec{\mathcal{E}}_n(\vec{x})) = V_2 \cdot \delta_{mn}. \quad (30)$$

Интегрируя уравнение (27) по объёму второго резонатора с модой $\vec{\mathcal{E}}_m(\vec{x})$ с учётом (29 - 30) получаем:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Gamma \frac{\partial}{\partial t} + \omega_m^2 \right) E_m^{\text{sig}}(t) = -g_{a\gamma\gamma} \int_{2\text{cav}} \frac{d^3x}{V_2} \left[(\vec{\mathcal{E}}_m \cdot \vec{B}_e) \ddot{a} - \left(\vec{\mathcal{E}}_m \cdot \vec{\nabla} (\vec{B}_e \cdot \vec{\nabla} a) \right) \right]. \quad (31)$$

Рассмотрим случай постоянного однородного магнитного поля $\vec{B}_e$, направленного вдоль оси z . Тогда из уравнения (31) получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Gamma \frac{\partial}{\partial t} + \omega_m^2 \right) E_m^{\text{sig}}(t) = -g_{a\gamma\gamma} B_e \int_{2\text{cav}} \frac{d^3x}{V_2} \mathcal{E}_m^z(\vec{x}) (\ddot{a}(\vec{x}, t) - \partial_z^2 a(\vec{x}, t)). \quad (32)$$

Правая часть в уравнении (32) осциллирует как $e^{-i\omega t}$. В таком случае решение этого уравнения:

$$E_m^{\text{sig}}(t) = \frac{g_{a\gamma\gamma} B_e}{\omega_{\pm}^2 - \omega_m^2 + i\omega_{\pm}\Gamma} \int_{2\text{cav}} \frac{d^3x}{V_2} \mathcal{E}_m^z(\vec{x}) (\ddot{a}(\vec{x}, t) - \partial_z^2 a(\vec{x}, t)), \quad (33)$$

Рассмотрим резонансный случай: подберём частоту моды детектирующего резонатора ω_m так, чтобы она совпадала с $\omega_{\pm}$, учтём, что $\Gamma = \omega_m/Q$ и подставим выражение (15) для $a(\vec{x}, t)$:

$$E_m^{\text{sig}}(t) = \frac{g_{a\gamma\gamma} E_0^2 Q B_e}{i\omega_{\pm}^2} \int_{2\text{cav}} \frac{d^3x}{V_2} \mathcal{E}_m^z(\vec{x}) \int_{1\text{cav}} d^3x' \frac{F_{\pm}(x')}{4\pi} (\omega_{\pm}^2 + \partial_z^2) \frac{e^{-i\omega_{\pm}t + ik_{\pm}|x-x'|}}{|x-x'|}. \quad (34)$$

Преобразуем выражение (34). Для этого рассмотрим действие градиента на поле $a(\vec{x}, t)$:

$$\vec{\nabla} a_{\pm}(\vec{x}, t) = -g_{a\gamma\gamma} \Re \int_{V_{\text{cav}}} d^3x' \frac{F_{\pm}(\vec{x}')}{4\pi} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{e^{ik_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|-i\omega_{\pm}t}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \quad (35)$$

Легко показать, что

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} f(|\vec{x}-\vec{x}'|) = -\vec{\nabla}_{\vec{x}'} f(|\vec{x}-\vec{x}'|). \quad (36)$$

С учётом (36) выражение (35) примет вид:

$$\vec{\nabla} a_{\pm}(\vec{x}, t) = -g_{a\gamma\gamma} \Re \int_{V_{\text{cav}}} d^3x' \frac{F_{\pm}(\vec{x}')}{4\pi} \left\{ -\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{e^{ik_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|-i\omega_{\pm}t}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right\}. \quad (37)$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} a_{\pm}(\vec{x}, t) &= -g_{a\gamma\gamma} \Re \int_{V_{\text{cav}}} d^3x' \frac{\vec{\nabla}_{\vec{x}'} F_{\pm}(\vec{x}')}{4\pi} \cdot \frac{e^{ik_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|-i\omega_{\pm}t}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \\ &+ g_{a\gamma\gamma} \Re \oint_{\partial V_{\text{cav}}} \vec{n} d\sigma' \frac{F_{\pm}(\vec{x}')}{4\pi} \cdot \frac{e^{ik_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|-i\omega_{\pm}t}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \end{aligned} \quad (38)$$

Прямая подстановка даёт $F_{\pm}(\vec{x}') = 0$ на границе цилиндра. Следовательно, второй член в формуле (38) зануляется, и мы получаем:

$$\vec{\nabla} a_{\pm}(\vec{x}, t) = -g_{a\gamma\gamma} \Re \int_{V_{\text{cav}}} d^3x' \frac{\vec{\nabla}_{\vec{x}'} F_{\pm}(\vec{x}')}{4\pi} \cdot \frac{e^{ik_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|-i\omega_{\pm}t}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \quad (39)$$

Теперь вычислим выражение

$$\vec{\mathcal{E}}_m(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} (\vec{B}_e(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} a(\vec{x}, t)), \quad (40)$$

учитывая, что $\vec{B}_e = B_e \cdot \vec{e}_z$, $B_e = \text{const}$, и $\vec{\mathcal{E}}_m(\vec{x}) = \mathcal{E}_m^z(\vec{x}) \cdot \vec{e}_z$. Интегрируя по частям и учитывая, что $\partial_{z'} F_{\pm}(\vec{x}') \neq 0$ на границе цилиндра, получаем формулу:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_m \cdot \vec{\nabla} (\vec{B}_e \cdot \vec{\nabla} a_{\pm}) &= -g_{a\gamma\gamma} B_e \mathcal{E}_m^z(\vec{x}) \Re \int_{V_{\text{cav}}} d^3x' \frac{\partial_{z'}^2 F_{\pm}(\vec{x}')}{4\pi} \cdot \frac{e^{ik_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|-i\omega_{\pm}t}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \\ &+ g_{a\gamma\gamma} B_e \mathcal{E}_m^z(\vec{x}) \Re \int_{\partial V_{\text{cav}}} \rho' d\rho d\varphi' \frac{\partial_{z'} F_{\pm}(\vec{x}')}{4\pi} \cdot \frac{e^{ik_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|-i\omega_{\pm}t}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \Big|_{z'=0}^{z'=L} \end{aligned} \quad (41)$$

Тогда выражение (34) примет вид:

$$E_m^{\text{sig}}(t) = \frac{g_{a\gamma\gamma}^2 E_0^2 Q B_e}{i\omega_{\pm}^2} \int_{2\text{ cav}} \frac{d^3x}{V_2} \mathcal{E}_m^z(\vec{x}) \left\{ \int_{1\text{ cav}} d^3x' \frac{\omega_{\pm}^2 F_{\pm}(\vec{x}')}{4\pi} \cdot \frac{e^{ik_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|-i\omega_{\pm}t}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \right. \\ \left. + \int_{1\text{ cav}} d^3x' \frac{\partial_{z'}^2 F_{\pm}(\vec{x}')}{4\pi} \cdot \frac{e^{ik_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|-i\omega_{\pm}t}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \right. \\ \left. - \int_{\partial 1\text{ cav}} \rho' d\rho d\varphi' \frac{\partial_{z'} F_{\pm}(\vec{x}')}{4\pi} \cdot \frac{e^{ik_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|-i\omega_{\pm}t}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right\}_{z'=0}^{z'=L} \quad (42)$$

Из (42) получим формулу для средней плотности энергии сигнальной электромагнитной моды:

$$\langle \rho_E^{\text{EM}} \rangle = \frac{1}{2} \langle |E_m^{\text{sig}}(t)|^2 \rangle = \frac{1}{4} \left[\frac{g_{a\gamma\gamma}^2 E_0^2 Q B_e}{4\pi} \cdot \frac{V_{1\text{ cav}}}{\Delta} \cdot \kappa_m^{\pm} \right]^2, \quad (43)$$

где κ_m - безразмерный форм-фактор, который зависит от:

1. Геометрий цилиндрических резонаторов и их взаимного расположения;
2. Мод накачки производящего и сигнальной моды детектирующего резонаторов;
3. Массы аксионоподобных частиц.

Явное выражение для $\kappa_m^{\pm}$ имеет вид:

$$\kappa_m^{\pm} = \sqrt{(\kappa_{m\cos}^{\pm})^2 + (\kappa_{m\sin}^{\pm})^2}, \quad (44)$$

$$\kappa_{m\sin}^{\pm \cos} = \left(\alpha_{m\sin}^{\pm \cos} + \frac{\beta_{m\sin}^{\pm \cos}}{\omega_{\pm}^2 L_1^2} \right). \quad (45)$$

где

$$\alpha_{m\sin}^{\pm \cos} = \int_{2\text{ cav}} \frac{d^3x}{V_2} \mathcal{E}_m^z(\vec{x}) \int_{1\text{ cav}} \frac{d^3x'}{V_1} \frac{|F_{\pm}(\vec{x}')|}{E_0^2} \cdot \frac{\Delta}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \left\{ \begin{array}{l} \cos(k_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|) \\ \sin(k_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|) \end{array} \right\}, \quad (46)$$

$$\beta_{m\sin}^{\pm \cos} = \int_{2\text{ cav}} \frac{d^3x}{V_2} \mathcal{E}_m^z(\vec{x}) \int_{1\text{ cav}} \frac{d^3x'}{V_1} \frac{\partial_{z'}^2 |F_{\pm}(\vec{x}')|}{E_0^2} \cdot \frac{\Delta \cdot L_1^2}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \left\{ \begin{array}{l} \cos(k_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|) \\ \sin(k_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|) \end{array} \right\} - \\ - \int_{2\text{ cav}} \frac{d^3x}{V_2} \mathcal{E}_m^z(\vec{x}) \int_{1\text{ S}} \frac{\rho' d\rho' d\varphi'}{V_1} \frac{\partial_{z'} |F_{\pm}(\vec{x}')|}{E_0^2} \cdot \frac{\Delta \cdot L_1^2}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \left\{ \begin{array}{l} \cos(k_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|) \\ \sin(k_{\pm}|\vec{x}-\vec{x}'|) \end{array} \right\} \Big|_{z'=0}^{z'=L}. \quad (47)$$

6.3 Чувствительность установки

Оценим чувствительность установки, то есть найдём нижнюю оценку на константу связи $g_{a\gamma\gamma}$, при которой аксионоподобные частицы могут быть зарегистрированы данной установкой.

Оценим количество рождённых фотонов сигнальной моды:

$$N_s \simeq \frac{1}{2\omega} \int_{2\text{ cav}} d^3x \langle |\vec{E}^{\text{sig}}(\vec{x}, t)|^2 \rangle \simeq \frac{V_2}{2\omega} \langle |E_m^{\text{sig}}(t)|^2 \rangle. \quad (48)$$

Для выделения рождённых фотонов на фоне шума необходимо ввести соотношение сигнал - шум:

$$\text{SNR} \simeq \frac{N_s}{N_{\text{th}}} \frac{1}{2L_2Q} \sqrt{\frac{t}{B}}, \quad (49)$$

где t - время измерений, B - ширина спектра мод накачки производящего резонатора.

Количество тепловых фотонов оценим по формуле:

$$N_{\text{th}} = \frac{T}{\omega}, \quad (50)$$

где T - их температура.

Таким образом, окончательно получаем оценку для константы связи:

$$g_{a\gamma\gamma} \simeq \left[\frac{128\pi^2 T L_2 \Delta^2}{E_0^4 (B_e)^2 Q \kappa_m^2 V_1^2 V_2} \sqrt{\frac{B}{t}} \text{SNR} \right]^{1/4}, \quad (51)$$

Объём детектирующего резонатора $V_2 = \pi R_2^2 \cdot L_2$ не является независимой величиной. Условие резонанса $\omega_{TM_{010}} = \omega_{\pm}$ для детектирующей TM_{010} - моды имеет вид: $R_2 = x_{01}/\omega_{\pm}$. Таким образом, получим:

$$g_{a\gamma\gamma} \simeq 2.52 \left[\frac{T \cdot \Delta^2 \cdot \omega_{\pm}^2}{E_0^4 (B_e)^2 Q \kappa_m^2 V_1^2} \sqrt{\frac{B}{t}} \text{SNR} \right]^{1/4}. \quad (52)$$

Подставляя оценочные выражения, окончательно получим:

$$\begin{aligned} g_{a\gamma\gamma} \simeq & 2.7 \cdot 10^{-12} \text{ GeV}^{-1} \left(\frac{T}{1.5 \text{ K}} \right)^{1/4} \left(\frac{\Delta}{0.2 \text{ m}} \right)^{1/2} \left(\frac{\omega_{\pm}}{1.5 \cdot 10^{-6} \text{ eV}} \right)^{1/2} \times \\ & \times \left(\frac{V_1}{1 \text{ m}^3} \right)^{-1/2} \left(\frac{Q}{10^5} \right)^{-1/4} \left(\frac{\kappa_m}{1} \right)^{-1/2} \left(\frac{E_0}{0.1 \text{ T}} \right)^{-1} \times \\ & \times \left(\frac{B_e}{10 \text{ T}} \right)^{-1/2} \left(\frac{t}{10^6 \text{ sec}} \right)^{-1/8} \left(\frac{B}{1 \text{ Hz}} \right)^{1/8} \left(\frac{\text{SNR}}{5} \right)^{1/4}. \end{aligned} \quad (53)$$

На рисунке 8 представлены зависимость нижней оценки $g_{a\gamma\gamma}$ от массы аксионоподобных частиц для различных мод производящего резонатора и для ТМ₀₁₀ моды детектирующего. Опять заметим «резонансный» характер зависимости: при массе m_a примерно равной частоте ω_+ получаем наилучшие результаты. Мы видим, что чувствительность установки соответствует другим подобным экспериментам (например, CAST), и для малых масс наиболее эффективна комбинация мод ТМ₀₁₀+ ТЕ₀₁₁ производящего резонатора.

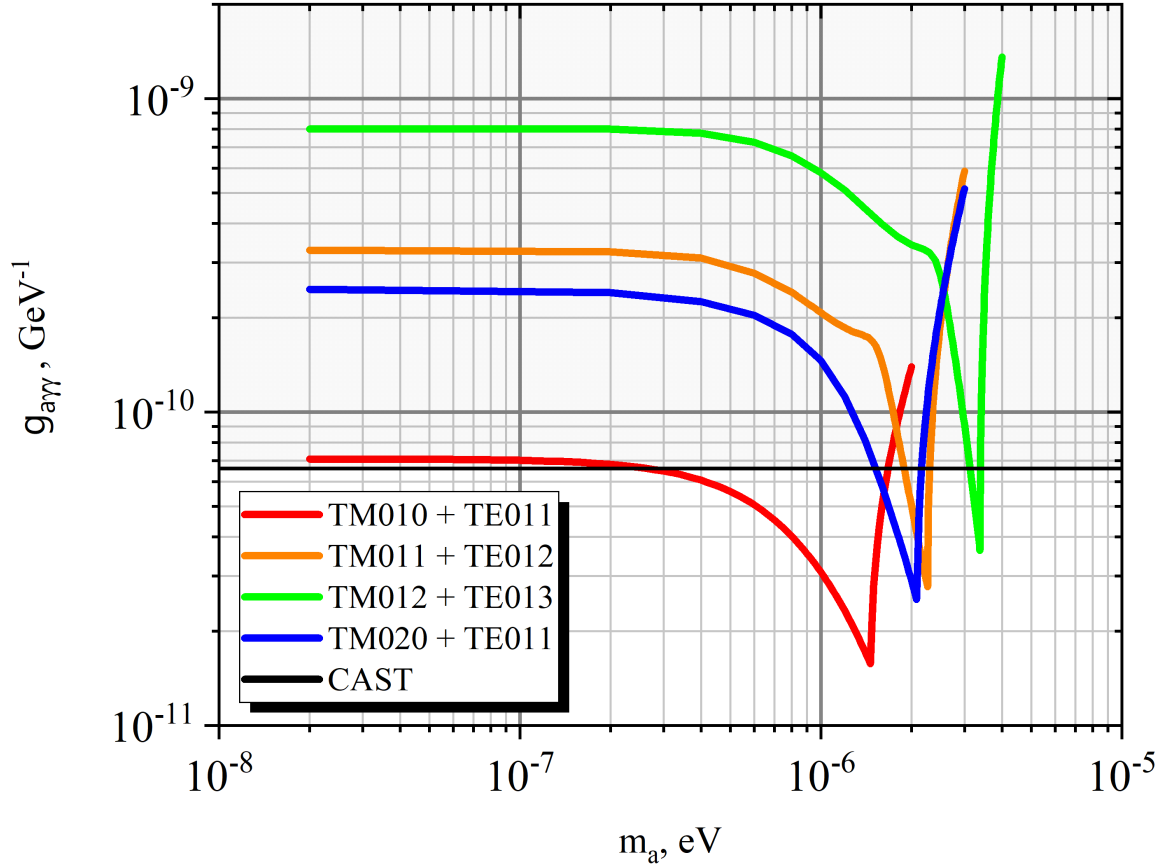


Рисунок 8 - Зависимость $g_{a\gamma\gamma}$ от массы аксионоподобных частиц m_a для различных мод *производящего* резонатора для ТМ₀₁₀ - моды *детектирующего* резонатора

В таблице 1 представлены резонансные значения нижней оценки константы связи, при которой аксионоподобные частицы могут быть зарегистрированы данной установкой. Мы видим, что наиболее оптимальной для данной конфигурации является комбинация мод ТМ₀₁₀ + ТЕ₀₁₁ производящего резонатора с размерами $R_1 = L_1 = 1$ м.

Параметры резонаторов					κ_c	$g_{a\gamma\gamma}, \Gamma \text{эВ}^{-1}$
$R_{1, \text{м}}$	$L_{1, \text{м}}$	Произв. моды	$\omega_+, \text{эВ}$	$R_{2, \text{м}}$		
1	1	TM010+TE011	$1.47 \cdot 10^{-6}$	0.33	$9.71 \cdot 10^{-3}$	$1.55 \cdot 10^{-11}$
		TM011+TE012	$2.26 \cdot 10^{-6}$	0.21	$4.72 \cdot 10^{-3}$	$2.75 \cdot 10^{-11}$
		TM012+TE013	$3.38 \cdot 10^{-6}$	0.14	$4.07 \cdot 10^{-3}$	$3.62 \cdot 10^{-11}$
		TM020+TE011	$2.10 \cdot 10^{-6}$	0.23	$5.45 \cdot 10^{-3}$	$2.46 \cdot 10^{-11}$
		TM011+TE011	$1.78 \cdot 10^{-6}$	0.27	$6.60 \cdot 10^{-4}$	$6.53 \cdot 10^{-11}$
		TM021+TE011	$2.26 \cdot 10^{-6}$	0.21	$5.87 \cdot 10^{-4}$	$7.79 \cdot 10^{-11}$
		TM021+TE021	$2.81 \cdot 10^{-6}$	0.17	$7.42 \cdot 10^{-4}$	$7.72 \cdot 10^{-11}$
		TM013+TE014	$4.57 \cdot 10^{-6}$	0.11	$3.89 \cdot 10^{-3}$	$4.30 \cdot 10^{-11}$
		TM013+TE015	$5.18 \cdot 10^{-6}$	0.09	$7.88 \cdot 10^{-4}$	$1.02 \cdot 10^{-10}$
		TM110+TE111	$1.49 \cdot 10^{-6}$	0.32	$2.85 \cdot 10^{-2}$	$2.88 \cdot 10^{-11}$
2	0.25	TM010+TE011	$2.78 \cdot 10^{-6}$	0.17	$3.61 \cdot 10^{-3}$	$3.49 \cdot 10^{-11}$
		TM011+TE012	$7.57 \cdot 10^{-6}$	0.06	$3.01 \cdot 10^{-3}$	$6.29 \cdot 10^{-11}$
		TM012+TE013	$1.26 \cdot 10^{-5}$	0.04	$3.00 \cdot 10^{-3}$	$8.14 \cdot 10^{-11}$
		TM020+TE011	$3.09 \cdot 10^{-6}$	0.16	$2.16 \cdot 10^{-3}$	$4.76 \cdot 10^{-11}$
		TM011+TE011	$5.07 \cdot 10^{-6}$	0.09	$2.60 \cdot 10^{-6}$	$1.75 \cdot 10^{-9}$
		TM021+TE011	$5.12 \cdot 10^{-6}$	0.09	$4.67 \cdot 10^{-6}$	$1.31 \cdot 10^{-9}$
		TM021+TE021	$5.18 \cdot 10^{-6}$	0.09	$7.20 \cdot 10^{-6}$	$1.07 \cdot 10^{-9}$
		TM013+TE014	$1.76 \cdot 10^{-5}$	0.03	$2.99 \cdot 10^{-3}$	$9.63 \cdot 10^{-11}$
		TM013+TE015	$2.01 \cdot 10^{-5}$	0.02	$7.01 \cdot 10^{-5}$	$6.72 \cdot 10^{-10}$
		TM110+TE111	$2.90 \cdot 10^{-6}$	0.17	$1.65 \cdot 10^{-3}$	$5.26 \cdot 10^{-11}$
0.5	4	TM010+TE011	$2.50 \cdot 10^{-6}$	0.19	$4.53 \cdot 10^{-3}$	$2.95 \cdot 10^{-11}$
		TM011+TE012	$2.54 \cdot 10^{-6}$	0.19	$3.66 \cdot 10^{-3}$	$3.31 \cdot 10^{-11}$
		TM012+TE013	$2.62 \cdot 10^{-6}$	0.18	$3.35 \cdot 10^{-3}$	$3.51 \cdot 10^{-11}$
		TM020+TE011	$3.75 \cdot 10^{-6}$	0.13	$2.52 \cdot 10^{-3}$	$4.84 \cdot 10^{-11}$
		TM011+TE011	$2.52 \cdot 10^{-6}$	0.19	$1.18 \cdot 10^{-3}$	$5.79 \cdot 10^{-11}$
		TM021+TE011	$3.75 \cdot 10^{-6}$	0.13	$6.69 \cdot 10^{-4}$	$9.41 \cdot 10^{-11}$
		TM021+TE021	$5.02 \cdot 10^{-6}$	0.10	$7.47 \cdot 10^{-4}$	$1.03 \cdot 10^{-10}$
		TM013+TE014	$2.73 \cdot 10^{-6}$	0.18	$3.23 \cdot 10^{-3}$	$3.65 \cdot 10^{-11}$
		TM013+TE015	$2.79 \cdot 10^{-6}$	0.17	$1.91 \cdot 10^{-3}$	$4.81 \cdot 10^{-11}$
		TM110+TE111	$2.29 \cdot 10^{-6}$	0.21	$1.47 \cdot 10^{-3}$	$4.96 \cdot 10^{-11}$

Таблица 1 - Чувствительность установки в резонансном случае ($m_a \simeq \omega_+$) для разных комбинаций мод накачки. R_1 - радиус производящего резонатора, L_1 - длина производящего резонатора, R_2 - радиус детектирующего резонатора, κ_c - геометрический форм-фактор для данных мод производящего резонатора и TM₀₁₀ - моды детектирующего резонатора, $g_{a\gamma\gamma}$ - нижняя оценка на константу связи, при которой аксионоподобные частицы могут быть зарегистрированы данной установкой.

7 Заключение

В настоящей работе была численно рассчитана усредненная по времени плотность энергии аксионоподобных частиц $\langle \rho_{\pm}^E \rangle$ при возбуждении двух электромагнитных мод в сверхпроводящем цилиндрическом резонаторе. В частности, было изучено пространственное распределение $\langle \rho_{\pm}^E \rangle$ для различных масс аксионоподобных частиц и для различных типов цилиндрических резонаторов. Также была рассчитана диаграмма направленности излучения аксионоподобных частиц. В заключение были проанализированы зависимости для чувствительности установки $g_{a\gamma\gamma}$ от массы аксионоподобных частиц m_a для отдельных комбинаций мод и геометрий резонаторов.

Кратко перечислим основные выводы работы:

1. Средняя плотность энергии $\langle \rho_+^E \rangle_T$ существенно выше средней плотности энергии $\langle \rho_-^E \rangle_T$;
2. Средняя плотность энергии $\langle \rho_+^E \rangle_T$ имеет «резонанс» при массе аксионоподобных частиц $m_a \lesssim \omega_+$;
3. Средняя плотность энергии существенно зависит от мод накачки, наиболее оптимальными являются моды, для которых $n_1 = n_2$ и нечётное $q_1 + q_2$;
4. Диаграмма направленности излучения аксионоподобных частиц существенно зависит от геометрии цилиндра и волнового числа. При $k \simeq 0$ диаграмма тривиальная, при ненулевом k основной поток направлен либо вдоль оси цилиндра (при $R/L \gtrsim 1$), либо в радиальном направлении (при $R/L \lesssim 0.35$), либо под некоторым углом к оси (при $0.35 \lesssim R/L \lesssim 1$);
5. Чувствительность установки соответствует другим экспериментам. Наиболее оптимальным для малых масс аксионоподобных частиц m_a является комбинация ТМ₀₁₀+ ТЕ₀₁₁ мод производящего резонатора.

Результаты работы опубликованы в статье [33]. Код программы и её описание выложены на сайте [34]. При расчётах была использована библиотека многомерного интегрирования [35]. Для ускорения были применены параллельные вычисления с помощью программного интерфейса MPI. Расчёты были выполнены на кластере ИЯИ РАН [36].

Благодарности

Автор выражает благодарность Петру Сатунину, Дмитрию Кирпичникову и Максиму Фиткевичу за совместную работу над задачей, а также Сергею Троицкому за ценные замечания.

8 Дальнейшие исследования

В дальнейшие планы входят следующие исследования:

1. Оптимизация эксперимента: подбор наиболее подходящей геометрии производящего и детектирующего резонаторов, их взаимного расположения и режима генерации аксионоподобных частиц (ультрарелятивистский или нерелятивистский);
2. Исследование другой конфигурации установки, при которой производящий резонатор имеет форму «трубы», а детектирующий представляет собой цилиндрический слой вокруг него (как показано на рисунке 9);
3. Описание взаимодействия аксионоподобных частиц с полем $\vec{B}_e$ в детектирующем резонаторе на языке квантовой теории поля для получения более точных результатов;
4. Исследование другого типа эксперимента, в котором производство и детектирование происходит в одном резонаторе.

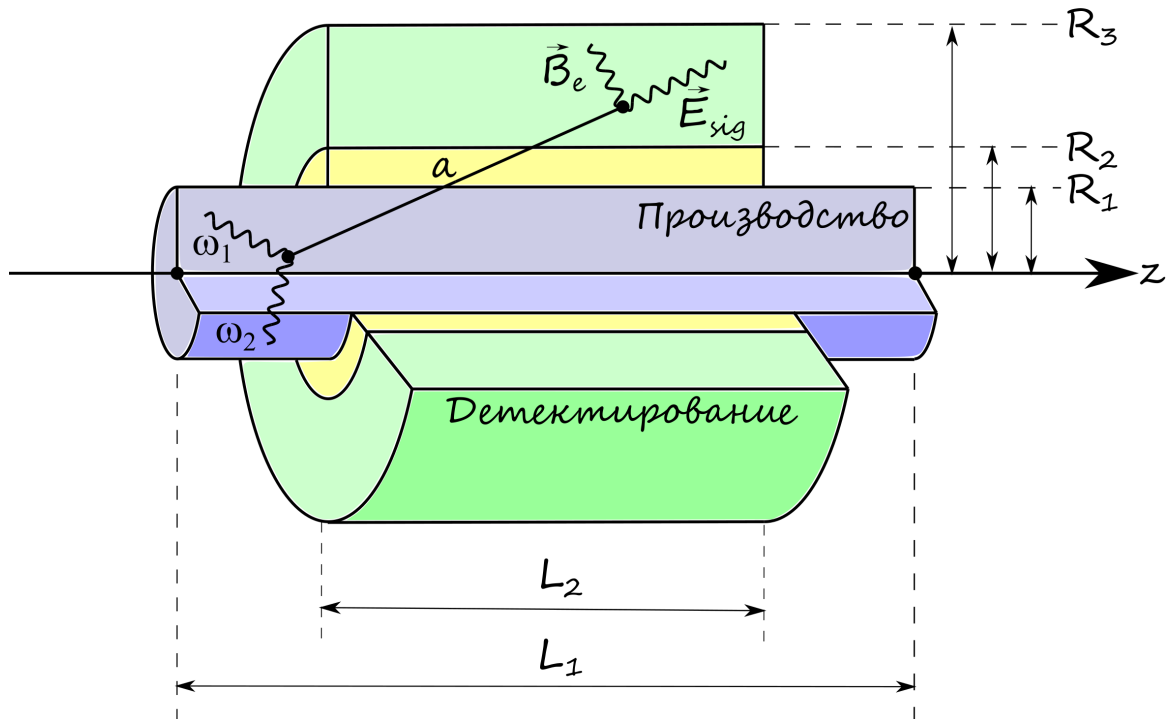


Рисунок 9 - Другой тип конфигурации эксперимента

А Явные выражения для ТМ_{npq} и ТЕ_{npq} - мод цилиндрического резонатора

Комплексные амплитуды электрического и магнитного полей ТМ_{npq} - мод имеют вид:

$$\mathcal{E}_z^{TMnpq} = \mathcal{E}_0 J_n \left(\frac{x_{np}}{R} \rho \right) \left\{ \begin{array}{c} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{array} \right\} \cos \left(\frac{q\pi}{L} z \right), \quad (54)$$

$$\mathcal{E}_\rho^{TMnpq} = \frac{-\mathcal{E}_0}{k_{npq}^2 - (q\pi/L)^2} \cdot \frac{q\pi}{L} \cdot \frac{x_{np}}{R} \cdot J'_n \left(\frac{x_{np}}{R} \rho \right) \left\{ \begin{array}{c} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{array} \right\} \sin \left(\frac{q\pi}{L} z \right), \quad (55)$$

$$\mathcal{E}_\varphi^{TMnpq} = \frac{-\mathcal{E}_0}{k_{npq}^2 - (q\pi/L)^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{nq\pi}{L} \cdot J_n \left(\frac{x_{np}}{R} \rho \right) \left\{ \begin{array}{c} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} \sin \left(\frac{q\pi}{L} z \right), \quad (56)$$

$$\mathcal{B}_z^{TMnpq} = 0, \quad (57)$$

$$\mathcal{B}_\rho^{TMnpq} = \frac{-i\omega_{npq}^{TM} \mathcal{E}_0}{k_{npq}^2 - (q\pi/L)^2} \cdot \frac{n}{\rho} \cdot J_n \left(\frac{x_{np}}{R} \rho \right) \left\{ \begin{array}{c} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} \cos \left(\frac{q\pi}{L} z \right), \quad (58)$$

$$\mathcal{B}_\varphi^{TMnpq} = \frac{i\omega_{npq}^{TM} \mathcal{E}_0}{k_{npq}^2 - (q\pi/L)^2} \cdot \frac{x_{np}}{R} \cdot J'_n \left(\frac{x_{np}}{R} \rho \right) \left\{ \begin{array}{c} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{array} \right\} \cos \left(\frac{q\pi}{L} z \right); \quad (59)$$

Комплексные амплитуды электрического и магнитного полей ТЕ_{npq} - мод имеют вид:

$$\mathcal{B}_z^{TEnpq} = \mathcal{B}_0 J_n \left(\frac{x'_{np}}{R} \rho \right) \left\{ \begin{array}{c} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{array} \right\} \sin \left(\frac{q\pi}{L} z \right), \quad (60)$$

$$\mathcal{B}_\rho^{TEnpq} = \frac{\mathcal{B}_0}{k_{npq}^2 - (q\pi/L)^2} \cdot \frac{q\pi}{L} \cdot \frac{x'_{np}}{R} \cdot J'_n \left(\frac{x'_{np}}{R} \rho \right) \left\{ \begin{array}{c} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{array} \right\} \cos \left(\frac{q\pi}{L} z \right), \quad (61)$$

$$\mathcal{B}_\varphi^{TEnpq} = \frac{\mathcal{B}_0}{k_{npq}^2 - (q\pi/L)^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{nq\pi}{L} \cdot J_n \left(\frac{x'_{np}}{R} \rho \right) \left\{ \begin{array}{c} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} \cos \left(\frac{q\pi}{L} z \right), \quad (62)$$

$$\mathcal{E}_z^{TEnpq} = 0, \quad (63)$$

$$\mathcal{E}_\rho^{TEnpq} = \frac{i\omega_{npq}^{TE} \mathcal{B}_0}{k_{npq}^2 - (q\pi/L)^2} \cdot \frac{n}{\rho} \cdot J_n \left(\frac{x'_{np}}{R} \rho \right) \left\{ \begin{array}{c} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} \sin \left(\frac{q\pi}{L} z \right), \quad (64)$$

$$\mathcal{E}_\varphi^{TEnpq} = \frac{-i\omega_{npq}^{TE} \mathcal{B}_0}{k_{npq}^2 - (q\pi/L)^2} \cdot \frac{x'_{np}}{R} \cdot J'_n \left(\frac{x'_{np}}{R} \rho \right) \left\{ \begin{array}{c} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{array} \right\} \sin \left(\frac{q\pi}{L} z \right). \quad (65)$$

Список литературы

- [1] R. D. Peccei and H. R. Quinn, «CP Conservation in the Presence of Instantons», Phys. Rev. Lett. **38** (1977), 1440-1443 doi:[10.1103/PhysRevLett.38.1440](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.38.1440).
- [2] R. D. Peccei and H. R. Quinn, «Constraints Imposed by CP Conservation in the Presence of Instantons», Phys. Rev. D **16** (1977), 1791-1797 doi:[10.1103/PhysRevD.16.1791](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.16.1791).
- [3] P. Svrcek and E. Witten, «Axions In String Theory», JHEP **06** (2006), 051 doi:[10.1088/1126-6708/2006/06/051](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2006/06/051) [arXiv:[hep-th/0605206](https://arxiv.org/abs/hep-th/0605206) [hep-th]].
- [4] A. Arvanitaki, S. Dimopoulos, S. Dubovsky, N. Kaloper and J. March-Russell, «String Axiverse», Phys. Rev. D **81** (2010), 123530 doi:[10.1103/PhysRevD.81.123530](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.123530) [arXiv:[0905.4720](https://arxiv.org/abs/0905.4720) [hep-th]].
- [5] J. Preskill, M. B. Wise and F. Wilczek, «Cosmology of the Invisible Axion», Phys. Lett. B **120** (1983), 127-132 doi:[10.1016/0370-2693\(83\)90637-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90637-8).
- [6] L. F. Abbott and P. Sikivie, «A Cosmological Bound on the Invisible Axion», Phys. Lett. B **120** (1983), 133-136 doi:[10.1016/0370-2693\(83\)90638-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90638-X).
- [7] M. Dine and W. Fischler, «The Not So Harmless Axion», Phys. Lett. B **120** (1983), 137-141 doi:[10.1016/0370-2693\(83\)90639-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90639-1).
- [8] E. W. Kolb and I. I. Tkachev, «Axion miniclusters and Bose stars», Phys. Rev. Lett. **71** (1993), 3051-3054 doi:[10.1103/PhysRevLett.71.3051](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.3051) [arXiv:[hep-ph/9303313](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9303313) [hep-ph]].
- [9] A. Vilenkin, «Cosmic Strings and Domain Walls», Phys. Rept. **121** (1985), 263-315 doi:[10.1016/0370-1573\(85\)90033-X](https://doi.org/10.1016/0370-1573(85)90033-X).
- [10] M. Colpi, S. L. Shapiro and I. Wasserman, «Boson Stars: Gravitational Equilibria of Selfinteracting Scalar Fields», Phys. Rev. Lett. **57** (1986), 2485-2488 doi:[10.1103/PhysRevLett.57.2485](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.57.2485).
- [11] I. I. Tkachev, «On the possibility of Bose star formation», Phys. Lett. B **261** (1991), 289-293 doi:[10.1016/0370-2693\(91\)90330-S](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)90330-S).
- [12] D. G. Levkov, A. G. Panin and I. I. Tkachev, «Radio-emission of axion stars», Phys. Rev. D **102** (2020), 023501 doi:[10.1103/PhysRevD.102.023501](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.023501) [arXiv:[2004.05179](https://arxiv.org/abs/2004.05179) [astro-ph.CO]].
- [13] J. H. Buckley, P. S. B. Dev, F. Ferrer and F. P. Huang, «Fast radio bursts from axion stars moving through pulsar magnetospheres», doi:[10.1103/PhysRevD.103.043015](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.043015) [arXiv:[2004.06486](https://arxiv.org/abs/2004.06486) [astro-ph.HE]].

- [14] Y. Kahn, B. R. Safdi and J. Thaler, «Broadband and Resonant Approaches to Axion Dark Matter Detection», *Phys. Rev. Lett.* **117** (2016) no.14, 141801 doi:[10.1103/PhysRevLett.117.141801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.141801) [arXiv:[1602.01086](https://arxiv.org/abs/1602.01086) [hep-ph]].
- [15] S. J. Asztalos *et al.* [ADMX], «Large scale microwave cavity search for dark matter axions», *Phys. Rev. D* **64** (2001), 092003 doi:[10.1103/PhysRevD.64.092003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.092003)
- [16] D. F. Jackson Kimball, S. Afach, D. Aybas, J. W. Blanchard, D. Budker, G. Centers, M. Engler, N. L. Figueroa, A. Garcon and P. W. Graham, *et al.* «Overview of the Cosmic Axion Spin Precession Experiment (CASPER)», *Springer Proc. Phys.* **245** (2020), 105-121 [arXiv:[1711.08999](https://arxiv.org/abs/1711.08999) [physics.ins-det]].
- [17] V. Anastassopoulos *et al.* [CAST], «New CAST Limit on the Axion-Photon Interaction», *Nature Phys.* **13** (2017), 584-590 doi:[10.1038/nphys4109](https://doi.org/10.1038/nphys4109) [arXiv:[1705.02290](https://arxiv.org/abs/1705.02290) [hep-ex]].
- [18] J. L. Feng, I. Galon, F. Kling and S. Trojanowski, «Axionlike particles at FASER: The LHC as a photon beam dump», *Phys. Rev. D* **98** (2018) no.5, 055021 doi:[10.1103/PhysRevD.98.055021](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.055021) [arXiv:[1806.02348](https://arxiv.org/abs/1806.02348) [hep-ph]].
- [19] A. Berlin, N. Blinov, G. Krnjaic, P. Schuster and N. Toro, «Dark Matter, Millicharges, Axion and Scalar Particles, Gauge Bosons, and Other New Physics with LDMX,» *Phys. Rev. D* **99** (2019) no.7, 075001 doi:[10.1103/PhysRevD.99.075001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.075001) [arXiv:[1807.01730](https://arxiv.org/abs/1807.01730) [hep-ph]].
- [20] R. R. Dusaev, D. V. Kirpichnikov and M. M. Kirsanov, «Photoproduction of axionlike particles in the NA64 experiment», *Phys. Rev. D* **102**, no. 5, 055018 (2020) doi:[10.1103/PhysRevD.102.055018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.055018) [arXiv:[2004.04469](https://arxiv.org/abs/2004.04469) [hep-ph]].
- [21] D. Banerjee *et al.* [NA64 Collaboration], «Search for Axionlike and Scalar Particles with the NA64 Experiment», *Phys. Rev. Lett.* **125** (2020) no.8, 081801 doi:[10.1103/PhysRevLett.125.081801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.081801) [arXiv:[2005.02710](https://arxiv.org/abs/2005.02710) [hep-ex]].
- [22] A. E. Egorov, N. P. Topchiev, A. M. Galper, O. D. Dalkarov, A. A. Leonov, S. I. Suchkov and Y. T. Yurkin, «Dark matter searches by the planned gamma-ray telescope GAMMA-400», *JCAP* **2011** (2020) 049 doi:[10.1088/1475-7516/2020/11/049](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/11/049) [arXiv:[2005.09032](https://arxiv.org/abs/2005.09032) [astro-ph.HE]].
- [23] F. Hoogeveen, «Terrestrial axion production and detection using RF cavities», *Phys. Lett. B* **288** (1992) 195. doi:[10.1016/0370-2693\(92\)91977-H](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)91977-H).
- [24] Z. Bogorad, A. Hook, Y. Kahn and Y. Soreq, «Probing Axionlike Particles and the Axiverse with Superconducting Radio-Frequency Cavities», *Phys. Rev. Lett.* **123** (2019) no.2, 021801 doi:[10.1103/PhysRevLett.123.021801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.021801) [arXiv:[1902.01418](https://arxiv.org/abs/1902.01418) [hep-ph]].

- [25] R. Janish, V. Narayan, S. Rajendran and P. Riggins, «Axion production and detection with superconducting RF cavities», *Phys. Rev. D* **100** (2019) no.1, 015036 doi:[10.1103/PhysRevD.100.015036](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.015036) [arXiv:[1904.07245](https://arxiv.org/abs/1904.07245) [hep-ph]].
- [26] C. Gao and R. Harnik, «Axion Searches with Two Superconducting Radio-frequency Cavities» [arXiv:[2011.01350](https://arxiv.org/abs/2011.01350) [hep-ph]].
- [27] I. G. Irastorza and J. Redondo, «New experimental approaches in the search for axion-like particles», *Prog. Part. Nucl. Phys.* **102** (2018), 89-159 doi:[10.1016/j.ppnp.2018.05.003](https://doi.org/10.1016/j.ppnp.2018.05.003) [arXiv:[1801.08127](https://arxiv.org/abs/1801.08127) [hep-ph]].
- [28] K. Van Bibber, N. R. Dagdeviren, S. E. Koonin, A. Kerman and H. N. Nelson, «Proposed experiment to produce and detect light pseudoscalars», *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987), 759-762. doi:[10.1103/PhysRevLett.59.759](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.59.759).
- [29] K. Ehret, M. Frede, S. Ghazaryan, M. Hildebrandt, E. A. Knabbe, D. Kracht, A. Lindner, J. List, T. Meier and N. Meyer, *et al.* «New ALPS Results on Hidden-Sector Lightweights», *Phys. Lett. B* **689** (2010), 149-155 doi:[10.1016/j.physletb.2010.04.066](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2010.04.066) [arXiv:[1004.1313](https://arxiv.org/abs/1004.1313) [hep-ex]].
- [30] M. Betz, F. Caspers, M. Gasior, M. Thumm and S. W. Rieger, «First results of the CERN Resonant Weakly Interacting sub-eV Particle Search (CROWS)», *Phys. Rev. D* **88** (2013) no.7, 075014 doi:[10.1103/PhysRevD.88.075014](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.075014) [arXiv:[1310.8098](https://arxiv.org/abs/1310.8098) [physics.ins-det]].
- [31] G. Zavattini, U. Gastaldi, R. Pengo, G. Ruoso, F. Della Valle and E. Milotti, «Measuring the magnetic birefringence of vacuum: the PVLAS experiment», *Int. J. Mod. Phys. A* **27** (2012), 1260017 doi:[10.1142/S0217751X12600172](https://doi.org/10.1142/S0217751X12600172) [arXiv:[1201.2309](https://arxiv.org/abs/1201.2309) [hep-ex]].
- [32] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*, 7th Ed., Wiley (1966).
- [33] D. Salnikov, P. Satunin, D. Kirpichnikov, M. Fitkevich, «Examining axion-like particles with superconducting radio-frequency cavity». *J. High Energ. Phys.* 2021, **143** (2021). doi:[10.1007/JHEP03\(2021\)143](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2021)143) [arXiv:[2011.12871](https://arxiv.org/abs/2011.12871) [hep-ph]].
- [34] <https://github.com/dmitry-salnikov-msu/Axion>.
- [35] <https://github.com/stevengj/cubature>.
- [36] http://cluster.inr.ac.ru/for_users.php.